

Module 5 - Lois conjointes pour variables discrètes

STT-1000 Probabilités et statistique

Département de mathématiques et de statistique



Vecteurs aléatoires

Vecteurs aléatoires

Dans bien des situations, on peut s'intéresser au comportement aléatoire de plusieurs variables **simultanément**.

- Le réservoir d'un barrage reçoit l'eau de 4 rivières. On sera intéressé par le comportement **conjoint** de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, où X_i est le débit de la i -ème rivière.
- Un système en parallèle fonctionne tant qu'au moins un de ses 3 composants fonctionne. Soit Y_i , la variable qui indique si le i -ème composant fonctionne. On sera intéressé par le comportement **conjoint** de $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$.

Pour notre cours : uniquement le cas de 2 variables aléatoires discrètes.

Loi conjointe de 2 variables aléatoires

Fonction de probabilité conjointe

Définition. La **fonction de probabilité conjointe** de deux v.a. discrètes X et Y est la fonction $p(x, y)$ qui associe à toute valeur possible (x, y) de (X, Y) la probabilité $P(X = x \text{ et } Y = y)$:

$$p(x, y) = P(X = x \text{ et } Y = Y).$$

Puisque c'est une fonction de probabilité, on a :

- $0 \leq p(x, y) \leq 1$ pour tout (x, y)
- $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$

Exemple

On considère un réseau d'alimentation électrique divisé en deux parties : le réseau $\mathcal{X}$ alimente 2 maisons et le réseau $\mathcal{Y}$ alimente 3 maisons. Parfois, il y a des problèmes avec le réseau et le courant ne se rend pas à toutes les maisons.

On définit les variables suivantes :

X = nombre de maisons du réseau $\mathcal{X}$ sans électricité

Y = nombre de maisons du réseau $\mathcal{Y}$ sans électricité

Une fonction de probabilité conjointe possible pour ces variables aléatoires est :

$p(x, y)$		y				
		0	1	2	3	Total
x	0	0,2	0,15	0,05	0	0,4
	1	0,1	0,1	0,05	0,1	0,35
	2	0,1	0,05	0,05	0,05	0,25
Total		0,4	0,3	0,15	0,15	1

Lois marginales

Lois marginales

Définition. Soit $p(x, y)$, la fonction de probabilité conjointe de X et Y . Alors les **fonctions de probabilité marginales** de X et Y sont respectivement données par

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p(x, y)$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p(x, y).$$

Retour à l'exemple

On peut calculer les deux fonctions de probabilité marginales :

Retour à l'exemple

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune maison sans électricité dans le réseau $\mathcal{X}$?

Lois conditionnelles

Lois conditionnelles

Définition. Soit $p(x, y)$, la fonction de probabilité conjointe de X et Y . Alors les **fonctions de probabilité conditionnelles** de X sachant Y et de Y sachant X sont respectivement données par

$$p_{X|Y}(x) = P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x \text{ et } Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

(fonction de x pour une valeur de y fixe)

$$p_{Y|X}(y) = P(Y = y | X = x) = \frac{P(X = x \text{ et } Y = y)}{P(X = x)} = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}$$

(fonction de y pour une valeur de x fixe)

Retour à l'exemple

On peut calculer les fonctions de probabilité conditionnelles :

Retour à l'exemple

Quelle est la probabilité qu'il y ait une maison du réseau $\mathcal{Y}$ sans électricité s'il y a 2 maisons du réseau $\mathcal{X}$ sans électricité?

Espérance conditionnelle

Puisque la fonction de probabilité conditionnelle d'une v.a. est une fonction de probabilité en bonne et due forme, on peut s'en servir pour calculer des espérances, variances, etc.

Définition. Les **espérances conditionnelles** de X sachant Y et de Y sachant X sont respectivement données par

$$E[X|y] = \sum_x x p_{X|y}(x)$$
$$E[Y|x] = \sum_y y p_{Y|x}(y).$$

Nous avons donc également

- $E[g(X)|y] = \sum_x g(x) p_{X|y}(x)$
- $E[g(Y)|x] = \sum_y g(y) p_{Y|x}(y)$

Retour à l'exemple

Quelle est l'espérance du nombre de maisons sans électricité dans le réseau $\mathcal{Y}$ s'il y a 2 maisons sans électricité dans le réseau $\mathcal{X}$? Quelle est sa variance?

Indépendance de variables aléatoires

Événements indépendants

Rappel :

Définition. Soient A et B deux événements de S . On dit que A et B sont **indépendants**, dénoté $A \perp B$, si, et seulement si,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Supposons que $P(B) > 0$, de sorte que $P(A|B)$ est bien définie.

- Si $A \perp B$, alors $P(A|B) = P(A)$.
- Si $P(A) > 0$ aussi, alors $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow A \perp B$.

Retour à l'exemple

Est-ce que les événements suivants sont indépendants :

E_1 = Il y a deux maisons sans électricité dans le réseau $\mathcal{X}$.

E_2 = Il y a au moins une maison sans électricité dans le réseau $\mathcal{Y}$?

Indépendance de variables aléatoires

Définition. Deux v.a. X et Y sont **indépendantes** si, et seulement si,

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \forall x, y$$

- Si on a $p(x, y)$ et que l'on veut savoir si $X \perp Y$, on doit obtenir $p_X(x)$ et $p_Y(y)$ et ensuite on vérifie si $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ pour toutes les paires de valeurs possibles.
- Si on a $p_X(x)$ et $p_Y(y)$ et que l'on nous demande de calculer $p(x, y)$, il n'est pas possible de le faire ... sauf si on nous dit que $X \perp Y$, auquel cas $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$.

Conséquence de l'indépendance

Théorème. Deux v.a. X et Y sont indépendantes si, et seulement si

$$p_{Y|x}(y) = p_Y(y) \text{ et } p_{X|y}(x) = p_X(x)$$

pour toutes les valeurs possibles de x et y .

Retour à l'exemple

Le nombre de maisons sans électricité dans le réseau $\mathcal{X}$ est-il indépendant du nombre de maisons sans électricité dans le réseau $\mathcal{Y}$?

Un autre exemple

Soient X et Y deux v.a. ayant comme fonctions de probabilité respectives $p_X(x) = 1/3$ pour $x = 1, 2$ et $p_X(x) = 1/6$ pour $x = 3, 4$, et $p_Y(y) = 1/2$ pour $y = 4, 5$. Quelle est la fonction de probabilité conjointe de X et Y ?

La covariance et la corrélation

Covariance

Si X et Y ne sont pas indépendantes, on peut mesurer leur association linéaire.

Définition. La **covariance** entre deux v.a. X et Y , dénotée $\sigma_{X,Y}$ ou $Cov(X, Y)$, est donnée par

$$\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

On peut également écrire la covariance sous la forme suivante :

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

La preuve est similaire à celle de $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Interprétation de la valeur de la covariance

- **Association positive** : Une valeur $\sigma_{XY} > 0$ signifie que les deux v.a. ont tendance à prendre des valeurs supérieures (ou inférieures) à leur moyenne respective **en même temps**.
- **Association négative** : Une valeur $\sigma_{XY} < 0$ signifie que X a tendance à prendre des valeurs **supérieures à sa moyenne** quand Y prend des valeurs **inférieures à sa moyenne** et vice-versa.

Unités :

L'unité de mesure de $Cov(X, Y)$ est l'unité de mesure de X multipliée par l'unité de mesure de Y. C'est donc assez difficile à interpréter...

Propriétés de la covariance

- $Cov(X, X) = Var(X)$
- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$
- $Cov(X + c, Y + d) = Cov(X, Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y)$
- $V(a_0 + a_1X + \dots + a_kX_k) = a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_k^2\sigma_k^2 + 2 \sum_{i < i'} \sum a_i a_{i'} Cov(X_i, X_{i'})$

QUIZ!

- Que peut-on dire de $Cov(5, X)$?
- Vrai ou Faux : $Cov(X, 3Y) = Cov(Y, 3X)$?
- Si X est mesurée en $^{\circ}C$ et Y en secondes, quelles sont les unités de la covariance?

Coefficient de corrélation

Mesure standardisée de la covariance :

Définition. Le **coefficient de corrélation** entre deux variables aléatoires X et Y est donné par

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Propriétés :

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- Si $X \perp Y$, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et donc $\rho = 0$.
(théorème 3.2, p. 97)

Retour à l'exemple

Calculer la covariance et la corrélation entre le nombre de maisons sans électricité dans le réseau $\mathcal{X}$ et le nombre de maisons sans électricité dans le réseau $\mathcal{Y}$.

Retour à l'exemple (suite)

Attention!

Deux pièges à éviter au sujet de la corrélation :

- $\rho(X, Y) = 0 \not\Rightarrow X \perp Y$

- $\rho(X, Y)$ mesure la corrélation **linéaire**. Deux variables peuvent être reliées sans que $\rho(X, Y)$ ne puisse le détecter.

Combinaisons linéaires

Deux variables - Espérance

Supposons deux v.a. X et Y . Soit $W = a_1X + a_2Y$.

$$E(W) = E[a_1X + a_2Y]$$

...

Deux variables - Variance

$$\begin{aligned}V(W) &= E(W^2) - (E(W))^2 \\&= E[(a_1X + a_2Y)^2] - [E(a_1X + a_2Y)]^2 \\&= E(a_1^2X^2 + 2a_1a_2XY + a_2^2Y^2) - [a_1E(X) + a_2E(Y)]^2 \\&= \dots \\&= a_1^2V(X) + 2a_1a_2Cov(X, Y) + a_2^2V(Y)\end{aligned}$$

$$V(a_1X + a_2Y) = a_1^2V(X) + a_2^2V(Y) + 2a_1a_2Cov(X, Y)$$

Généralisation pour plusieurs variables

Soient $X, \dots, X_n$, des variables aléatoires et $a_0, a_1, \dots, a_n$, des constantes.
Soit $Y = a_0 + a_1X + \dots + a_nX_n$. Alors

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E[X_i]$$

$$V[Y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}[X_i] + 2 \sum_j \sum_{i < j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

(où $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$, comme vu précédemment.)

Si $X, \dots, X_n$ sont des v.a. **indépendantes**, alors $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ et

$$V[Y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 V[X_i].$$

Exemple

Soient X_1, X_2, X_3 les débits de 3 rivières.

Soit Y la hausse d'un lac où ces rivières se jettent ou prennent leur source. On peut écrire $Y = 0,6X_1 + 0,5X_2 - 1,6X_3$.

On sait que $E(X_1) = 10$, $E(X_2) = 20$, $E(X_3) = 10$, $Var(X_1) = 4$, $Var(X_2) = 16$, $Var(X_3) = 1$, $Cov(X_1, X_2) = 1,6$ et que X_3 est indépendante de X_1 et de X_2 .

Calculez l'espérance et la variance de Y , la hausse du lac.

Exemple

Réponses des exemples

Réponses des exemples (1/2)

- **Exemple (lois marginales) :** $p_X(0) = 0,4$, $p_X(1) = 0,35$, $p_X(2) = 0,25$; $p_Y(0) = 0,4$, $p_Y(1) = 0,3$, $p_Y(2) = 0,15$, $p_Y(3) = 0,15$.
- **Exemple (aucune maison sans électricité dans $\mathcal{X}$) :** $P(X = 0) = p_X(0) = 0,4$.
- **Exemple (lois conditionnelles sachant $X = 2$) :** $p_{Y|2}(0) = 0,4$, $p_{Y|2}(1) = 0,2$, $p_{Y|2}(2) = 0,2$, $p_{Y|2}(3) = 0,2$.
- **Exemple (une maison de $\mathcal{Y}$ sans électricité si 2 maisons de $\mathcal{X}$) :** $P(Y = 1|X = 2) = 0,2$.
- **Exemple (espérance et variance conditionnelles sachant $X = 2$) :** $E[Y|2] = 1,2$; $V[Y|2] = 1,36$.

Réponses des exemples (2/2)

- Exemple (indépendance de E_1 et E_2) : oui, $P(E_1 \cap E_2) = 0,15 = P(E_1)P(E_2)$.
- Exemple (indépendance de X et Y) : non, par exemple $p(0, 0) = 0,2 \neq p_X(0)p_Y(0) = 0,16$.
- Un autre exemple (fonction de probabilité conjointe à partir des marginales) : impossible à déterminer sans hypothèse supplémentaire (par exemple l'indépendance).
- Exemple (covariance et corrélation) : $Cov(X, Y) = 0,2075$; $\rho(X, Y) \approx 0,245$.
- Exemple (rivières et hausse du lac) : $E(Y) = 0$; $V(Y) = 8,96$.

Réponses des quiz

Réponses des quiz

- **Quiz ($Cov(5, X)$) : $Cov(5, X) = 0$ (la covariance avec une constante est toujours nulle).**
- **Quiz ($Cov(X, 3Y) = Cov(Y, 3X)$?) : Vrai, car $Cov(X, 3Y) = 3 Cov(X, Y) = Cov(Y, 3X)$.**
- **Quiz (unités de la covariance) : $^{\circ}\text{C} \times \text{secondes}$.**

Bibliographie

Ce document est rédigé avec Beamer ainsi qu'une classe .cls fournie par Jérôme Soucy. Les diapositives sont adaptées des diapositives créées par Anne-Sophie Charest pour le cours STT-1000 ainsi que celles créées par Thierry Duchesne et Emmanuelle Reny-Nolin pour le cours STT-1900.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à l'adresse : julien.miron@mat.ulaval.ca.